

# Průběhy funkcí, Taylorova řada, extrémní úlohy

Postup při vyšetřování průběhu funkce:

1. definiční obor
2. body nespojitosti, sudost, lichost, periodičnost, jiné na první pohled patrné vlastnosti
3. monotonnost, lokální extrémy,
4. konvexnost a konkávnost, inflexní body, ověření lokálních extrémů
5. asymptoty
6. průsečíky s osami, funkční hodnoty ve význačných bodech, další vlastnosti
7. graf, obor hodnot

**Podrobně vyšetřete průběhy funkcí:**

1.  $f(x) = x^4 - 2x^2$
2.  $f(x) = x^3 - 3x + 2$
3.  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$
4.  $f(x) = x - \arctan x$
5.  $f(x) = x + \sin x$
6.  $f(x) = \frac{x}{3 - x^2}$
7.  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
8.  $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$
9.  $f(x) = x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$
10.  $f(x) = x^3e^{-\frac{x^2}{2}}$
11.  $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$

**Napište Taylorovu řadu pro funkce**

1.  $f(x) = \sin x$  v bodě  $x_0 = 0$ ,
2.  $f(x) = \cos x$  v bodě  $x_0 = 0$ ,
3.  $f(x) = e^x$  v bodě  $x_0 = 0$ ,
4.  $f(x) = \ln x$  v bodě  $x_0 = 1$ ,
5.  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  v bodě  $x_0 = 0$ .
6. Odvoďte vztah  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ .

**Úlohy o maximech a minimech funkcí:**

1. **Problém šikového strýčka:**  
Předpokládejme, že jste šikový strýček. Váš synovec za vámi přijde s následujícím úkolem: Chtěl by z obdélníkového kusu plechu o rozměrech 50 cm a 30 cm udělat krabici bez víka s co největším objemem. Vaším úkolem je tedy zjistit, jak velké čtverce je nutné z rohů plechu odstříhnout, aby vzniklá krabice měla největší objem.
2. **Problém konstruktéra firmy PEPSI:**  
Konstruktér firmy PEPSI má následující úkol: Musí navrhnout válcovou plechovku, aby se do ní vešlo přesně 250 cm<sup>3</sup> kapaliny při co nejmenší spotřebě plechu na výrobu plechovky. Plechovka tedy musí mít co nejmenší povrch.
3. **Problém líného vrabce:**  
Na plotě vysokém 1 m sedí vrabec. Ve vzdálenosti 15 m od plotu roste strom s větví ve výšce 3 m. Zem mezi plotem a stromem je hustě poseta žížalami. V jaké vzdálenosti od plotu má vrabec sezobnout žížalu, aby proletěl trasu plot-žížala-větev po přímočarých trajektoriích po co nejkratší dráze?